

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»

О.А. Решетникова

«10» ноября 2020 г.

«СОГЛАСОВАНО»

Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

А.Л. Семенов

«10» ноября 2020 г.

**Государственная итоговая аттестация по образовательным
программам основного общего образования в форме
основного государственного экзамена (ОГЭ)**

**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов основного
государственного экзамена 2021 года
по МАТЕМАТИКЕ**

подготовлен Федеральным государственным бюджетным
научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Пояснения к демонстрационному варианту контрольных
измерительных материалов основного государственного экзамена
2021 года по МАТЕМАТИКЕ**

При ознакомлении с демонстрационным вариантом 2021 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в демонстрационный вариант, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2021 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на экзамене 2021 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки обучающихся для проведения основного государственного экзамена по математике, размещённом на сайте: www.fipi.ru.



В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать возможность любому участнику экзамена и широкой общественности составить представление о структуре будущей экзаменационной работы, количестве и форме заданий, а также об их уровне сложности. Приведённые критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, позволят составить представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

Эти сведения дают будущим участникам экзамена возможность выработать стратегию подготовки к сдаче экзамена по математике в 2021 году.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня: x_1 и x_2 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень x_0 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , первый член которой равен a_1 и разность равна d :

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула n -го члена геометрической прогрессии b_n , первый член которой равен b_1 , а знаменатель равен q :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}.$$

Таблица квадратов двузначных чисел

| | | Единицы | | | | | | | | | |
|---------|---|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Десятки | 1 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| | 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| | 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| | 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| | 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| | 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| | 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| | 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| | 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

ГЕОМЕТРИЯ

- Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.
- Радиус r окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.
- Радиус R окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.
- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- Формула длины l окружности радиусом R :

$$l = 2\pi R.$$

- Формула длины l дуги окружности радиусом R , на которую опирается центральный угол в φ градусов:

$$l = \frac{2\pi R \varphi}{360}.$$

- Формула площади S параллелограмма со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = ah.$$

- Формула площади S треугольника со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- Формула площади S трапеции с основаниями a , b и высотой h :

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

- Формула площади S круга радиусом R :

$$S = \pi R^2.$$

**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов основного государственного
экзамена 2021 года по МАТЕМАТИКЕ**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, ответ запишите в виде десятичной.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

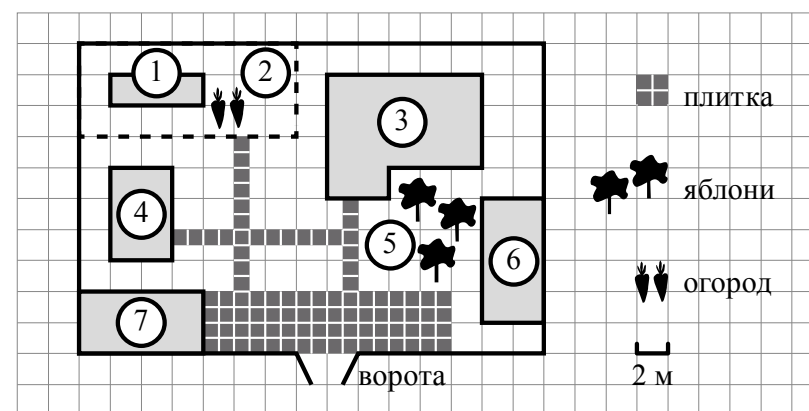
После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.



На плане изображено домохозяйство по адресу: с. Авдеево, 3-й Поперечный пер., д. 13 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота.

При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева — гараж, отмеченный на плане цифрой 7. Площадь, занятая гаражом, равна 32 кв. м.

Жилой дом находится в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай (подсобное помещение), расположенный рядом с гаражом, и теплица, построенная на территории огорода (огород отмечен цифрой 2). Перед жилым домом имеются яблоневые посадки.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м × 1 м. Между баней и гаражом имеется площадка площадью 64 кв. м, вымощенная такой же плиткой.

К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

- 1 Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр.

| Объекты | жилой дом | сарай | баня | теплица |
|---------|-----------|-------|------|---------|
| Цифры | | | | |

- 2 Тротуарная плитка продаётся в упаковках по 4 штуки. Сколько упаковок плитки понадобилось купить, чтобы выложить все дорожки и площадку перед гаражом?

Ответ: _____.

- 3 Найдите площадь, которую занимает жилой дом. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: _____.

- 4 Найдите расстояние от жилого дома до гаража (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.

Ответ: _____.

- 5 Хозяин участка планирует устроить в жилом доме зимнее отопление. Он рассматривает два варианта: электрическое или газовое отопление. Цены на оборудование и стоимость его установки, данные о расходе газа, электроэнергии и их стоимости даны в таблице.

| | Нагреватель (котел) | Прочее оборудование и монтаж | Сред. расход газа / сред. потребл. мощность | Стоимость газа / электроэнергии |
|-------------------|---------------------|------------------------------|---|---------------------------------|
| Газовое отопление | 24 тыс. руб. | 18 280 руб. | 1,2 куб. м/ч | 5,6 руб./куб. м |
| Электр. отопление | 20 тыс. руб. | 15 000 руб. | 5,6 кВт | 3,8 руб./кВт·ч |

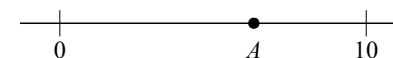
Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовое оборудование. Через сколько часов непрерывной работы отопления экономия от использования газа вместо электричества компенсирует разность в стоимости установки газового и электрического отопления?

Ответ: _____.

- 6 Найдите значение выражения $\frac{1}{4} + 0,07$.

Ответ: _____.

- 7 На координатной прямой отмечена точка A .



Известно, что она соответствует одному из четырёх указанных ниже чисел. Какому из чисел соответствует точка A ?

- 1) $\frac{181}{16}$ 2) $\sqrt{37}$ 3) 0,6 4) 4

Ответ:

8 Найдите значение выражения $a^{-7} \cdot (a^5)^2$ при $a = 5$.

Ответ: _____.

9 Решите уравнение $x^2 + x - 12 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

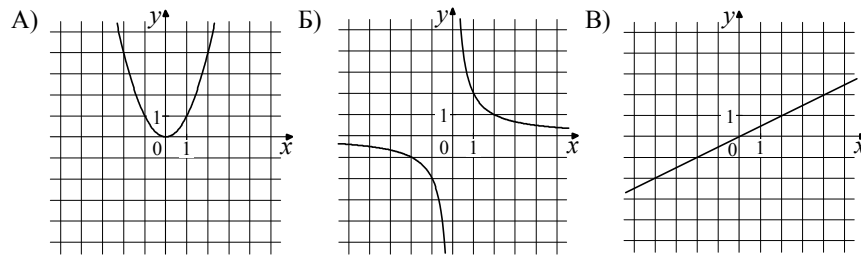
Ответ: _____.

10 На тарелке лежат пирожки, одинаковые на вид: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с яблоками. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с яблоками.

Ответ: _____.

11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

- 1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{x}{2}$ 3) $y = \frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

| | | |
|---|---|---|
| А | Б | В |
| | | |

12 Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1,8t_C + 32$, где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -25 градусов по шкале Цельсия?

Ответ: _____.

13 Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2,6 \leq 0, \\ x + 5 \geq 1. \end{cases}$$

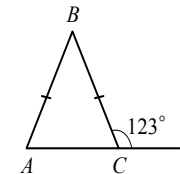


Ответ:

14 Вика решила начать делать зарядку каждое утро. В первый день она сделала 30 приседаний, а в каждый следующий день она делала на одно и то же количество приседаний больше, чем в предыдущий день. За 15 дней она сделала всего 975 приседаний. Сколько приседаний сделала Вика на пятый день?

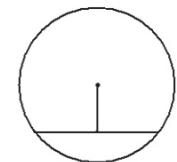
Ответ: _____.

15 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине C равен 123° . Найдите величину угла BAC . Ответ дайте в градусах.



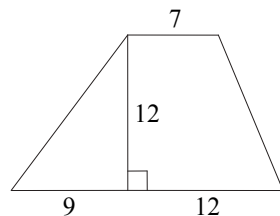
Ответ: _____.

16 Найдите длину хорды окружности радиусом 13, если расстояние от центра окружности до хорды равно 5.



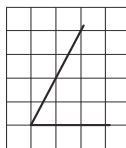
Ответ: _____.

- 17 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

- 18 Найдите тангенс острого угла, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

- 19 Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
- 2) Треугольник со сторонами 1, 2, 4 существует.
- 3) В любом параллелограмме есть два равных угла.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

- 20 Решите уравнение $x^4 = (4x - 5)^2$.

- 21 Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки равна 6 км/ч?

- 22 Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

- 23 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

- 24 В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB . Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

- 25 Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиусом 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике

Часть 1

За правильный ответ на каждое из заданий 1–19 ставится 1 балл.

| Номер задания | Правильный ответ |
|---------------|------------------|
| 1 | 3461 |
| 2 | 23 |
| 3 | 68 |
| 4 | 10 |
| 5 | 500 |
| 6 | 0,32 |
| 7 | 2 |
| 8 | 125 |
| 9 | 3 |
| 10 | 0,2 |
| 11 | 132 |
| 12 | –13 |
| 13 | 2 |
| 14 | 50 |
| 15 | 57 |
| 16 | 24 |
| 17 | 168 |
| 18 | 2 |
| 19 | 13 <или> 31 |

Критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом
Часть 2

20 Решите уравнение $x^4 = (4x - 5)^2$.

Решение.

Исходное уравнение приводится к виду:

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x - 5) = 0.$$

Уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$ не имеет корней.

Уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$ имеет корни -5 и 1 .

Ответ: -5 ; 1 .

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---|
| 2 | Обоснованно получен верный ответ |
| 1 | Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

- 21** Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки равна 6 км/ч?

Решение.

Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 4 км/ч, при движении по течению равна 8 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{8}\right)$ часа. Из условия задачи следует, что это время

равно 3 часам. Составим уравнение: $\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 3$.

Решив уравнение, получим $x = 8$.

Ответ: 8 км.

| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--|
| 2 | Ход решения задачи верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

- 22** Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

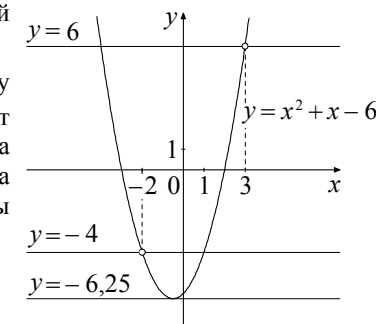
При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид: $y = x^2 + x - 6$;

её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$.

Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Ответ: $c = -6,25$; $c = -4$; $c = 6$.

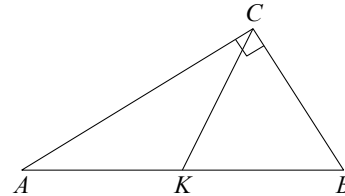


| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---|
| 2 | График построен верно, верно найдены искомые значения параметра |
| 1 | График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

- 23** В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.

$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$



Ответ: 5.

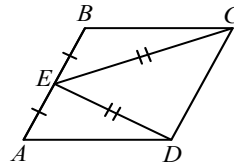
| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--|
| 2 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

- 24** В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB . Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство.

Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам.

Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна 180° , то углы равны 90° . Такой параллелограмм — прямоугольник.



| Баллы | Содержание критерия |
|-------|---|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

- 25** Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиусом 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

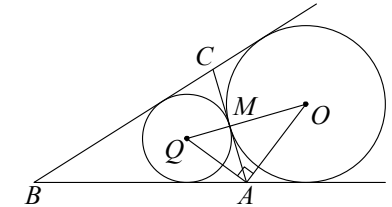
Точка касания M окружностей делит AC пополам.

Лучи AQ и AO — биссектрисы смежных углов, значит, угол OAQ прямой.

Из прямоугольного треугольника OAQ получаем: $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.



| Баллы | Содержание критерия |
|-------|--|
| 2 | Ход решения верный, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | <i>Максимальный балл</i> |

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 189/1513 зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52953)

«64. Экзаменационные работы проверяются двумя экспертами. По результатам проверки эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы... В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Третий эксперт назначается председателем предметной комиссии из числа экспертов, ранее не проверявших экзаменационную работу.

Третьему эксперту предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу. Баллы, выставленные третьим экспертом, являются окончательными».

Существенным считается следующее расхождение.

1. Расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 20–25, составляет 2 балла. Третий эксперт проверяет только ответ на те задания, которые вызвали столь существенное расхождение.

2. Расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами в любых двух или более заданиях (из заданий 20–25). Третий эксперт проверяет ответы на все задания 20–25.